Az NGB_MA002_2 és NGB_MA009_2 kurzusok aláírásért írandó beszámolóinak anyaga

1. Integrálszámítás

   (a) Racionális törtfüggvények

   - Számolja ki a következő integrálokatt: $\int\limits_0^1 \frac{1}{4x+5}dx, \quad \int \frac{3}{(4x+5)^3}dx, \quad \int \frac{1}{x^2+9}dx.$

   (b) Helyettesítéses integrálás.

   - Számolja ki a következő integrálokat: $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx, \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx, \quad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx, \quad \int \frac{e^x}{\sin^2(e^x)}dx.$

   (c) Improprius integrálok.

   - Számolja ki a következő integrálokat: $\int\limits_1^\infty \frac{1}{2x^2}dx, \quad \int\limits_{-\infty}^0 e^{4x}dx, \quad \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

2. Vektorgeometria

   (a) Pontok koordinátáinak meghatározása.

   - Számolja ki az $A(1,2,4)$ és a $B(0,1,6)$ pontok által meghatározott szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontjának koordinátáit.

   (b) Pontok távolsága.

   - Milyen messze van egymástól az $A(-1,2,4)$ és a $B(2,1,0)$ pont?

   (c) Vektorok hossza.

   - Mik az $\mathbf{a} = (1,3,-2)$ vektor irányába mutató egységvektor koordinátái?

   (d) Vektorok skaláris szorzata.

   - Merőleges-e az $\mathbf{a} = (2,-1,-2)$ és a $\mathbf{b} = (1,0,2)$ vektor? Válaszát indokolja.
   - Hegyesszöget zárnak-e be az $\mathbf{a} = (-2,1,-2)$ és a $\mathbf{b} = (-3,1,2)$ vektorok? Válaszát indokolja.
   - Legyen $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Számolja ki $\mathbf{a} \cdot 2\mathbf{b}$-t.

   (e) Vektoriális szorzat.

   - Számolja ki a az $\mathbf{a} = (-2,-1,-2)$ és a $\mathbf{b} = (3,0,2)$ vektorok vektoriális szorzatát.
   - Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Számolja ki $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$-t.

   (f) Vegyesszorzat.

   - Számolja ki az $\mathbf{i}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ és $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ vektorok vegyesszorzatát.
   - Legyen $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Számolja ki $\mathbf{cab}$-t.

   (g) Vektorműveletek vegyesen

   - Legyen $\mathbf{a} = (1,-1,-2)$, $\mathbf{b} = (-1,2,-1)$, $\mathbf{c} = (1,1,3)$. Számolja ki az alábbi mennyiségeket:

   $$|\mathbf{a}|, \quad |\mathbf{a} - \mathbf{c}|, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}, \quad |(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}|$$

   (h) Egyenes

   - Írja fel az $A(-1,2,2)$ és a $B(2,1,3)$ pontokra illeszkedő egyenes paraméteres egyenletrendszerét.
   - Adja meg az $x = 1 - t$, $y = 2 + 2t$, $z = -t$ egyenletrendszerű egyenes egy pontját.
   - Adja meg az $x = 1 + t$, $y = 2$, $z = 3 - t$ egyenletrendszerű egyenes egy irányvektorát.
   - Írja fel az $A(1,-1,3)$ ponton átmenő, az $x = 1 + 3t$, $y = 2 + 2t$, $z = 4 - 5t$ egyenessel párhuzamos egyenes egyenletrendszerét.
   - Egy egyenesen vannak-e az $A(0,1,2)$, $B(2,4,6)$ és $C(3,6,9)$ pontok?
   - Adja meg az $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ egyenes egy pontját.
   - Adja meg az $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ egyenes egy irányvektorát.

(i) Sík

- Adja meg a $2x + 4y - 6z = 2$ sík egy lehetséges normálvektorát.
- Illeszkedik-e az $A(1, 2, 5)$ pont az $x - 4y - 6z = 0$ síkra?
- Adja meg az $x + y + 2z = 4$ sík egy pontját.
- Írja fel az $A(1, -1, 3)$ ponton átmenő, az $x - y + 4z - 7 = 0$ síkkal párhuzamos sík egyenletét.
- Hol döfik a koordináta tengelyek az $x - 2y + 3z = 6$ síkot?

(j) Térelemek kölcsönös helyzete.

- Párhuzamos-e az $S_1 : -x + 2y + 3z - 4 = 0$ és az $S_2 : 2x - 4y - 6z = 2$ sík? Válaszát indokolja.
- Párhuzamos-e az $e : x = t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3 + t$ egyenes és az $S : -x - 2y + 3z - 2 = 0$ sík? Válaszát indokolja.
- Döfi-e az $x = 1 + t$, $y = 2$, $z = 3 - t$ egyenes a $3x - y + 2z = 4$ síkot? Válaszát indokolja.

3. Vektorterek

(a) Lineáris kombináció.

- Adja meg az $\mathbf{a} = (-2, -1, -2, 0)$, $\mathbf{b} = (2, -1, -1, 0)$ és $\mathbf{c} = (1, -3, 0, 1)$ vektorok $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ és $c_3 = 1$ együtthatókkal képezett lineáris kombinációját.
- Állítsa elő a $Q(x) = 2x^2 - x + 2$ polinomot a $P_1(x) = x^2 + 1$, $P_2(x) = x$ és $P_3(x) = 1$ polinomok lineáris kombinációjaként.

(b) Norma meghatározása

- Számolja ki $\mathbf{a} = (0, 1, 1, 0, 2)$ vektor normáját.
- Az $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 0, -1)$ vektort milyen konstanssal kell megszorozni, hogy az eredmény normája 1 legyen?

(c) Merőlegesség, párhuzamosság

- Milyen x-re lesz az $\mathbf{a} = (1, x, 1, 2, -1)$ vektor és a $\mathbf{b} = (1, 1, 2, 2, 3)$ vektor merőleges?
- Párhuzamos-e az $\mathbf{a} = (1, -1, 1, 2, -1)$ és a $\mathbf{b} = (-2, 2, 2, -4, 2)$ vektor? Válaszát indokolja.

(d) Bázis, dimenzió

- Hány dimenziós a 3×2-es mátrixok tere? Válaszát indokolja.
- A 2×3-as mátrixok terében adja meg a szokásos bázist.
- Hány dimenziós a legfeljebb hatodfokú polinomok tere? Válaszát indokolja.

(e) Műveletek mátrixokkal

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Számolja ki a $2A - 3B$ mátrixot.
- Számolja ki az $A + B^T$ mátrixot.
- Számolja ki az $(A - B)^T$ mátrixot.

Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Számolja ki az AB mátrixot.
- Számolja ki az BA^T mátrixot.
- Számolja ki az $(A + B)^2$ mátrixot.
- Számolja ki az CD mátrixot.
- Számolja ki az $D^T C$ mátrixot.

(f) Determináns

- Legyen $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Számolja ki $\det(A)$-t.
- Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Határozza meg x értékét úgy, hogy $\det(A) = 0$ teljesüljön.

(g) Mátrix rangja

- Számítsa ki az $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix rangját.
- Adja meg y értékét úgy, hogy az $A = \begin{bmatrix} 3 & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix rangja 1 legyen.

(h) Mátrixok inverze

- Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Számolja ki A^{-1}-et.
- Legyen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Adja meg x értékét úgy, hogy a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix}$ mátrix az A inverze legyen.
- Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Megadható-e x értéke úgy, hogy a $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & x \end{bmatrix}$ mátrix az A inverze legyen?

(i) Sajátérték meghatározása

- Számolja ki az $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei?
- Sajátvektora-e az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor az $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixnak? Válaszát indokolja.
- A $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor az $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix melyik sajátértékhez tartozó sajátvektora? Válaszát indokolja.

4. Többváltozós függvények

(a) Kétváltozós függvény értelmezési tartományának meghatározása

- Ábrázolja a legbővebb halmazt, melyen az $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2)$ függvény értelmezhető.
- Ábrázolja a legbővebb halmazt, melyen az $f(x, y) = \sqrt{2x - y + 8}$ függvény értelmezhető.

(b) Többváltozós függvény parciális deriváltjainak meghatározása

- Legyen $f(x, y) = 4\sqrt{x} - y^3 + 3xy$. Mivel egyenlő $f'_x(x, y)$?
- Legyen $f(x, y) = e^{2x-5y}$. Mivel egyenlő $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$?
- Legyen $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$. Mivel egyenlő $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$?

(c) Többváltozós függvény gradiensének meghatározása

- Legyen $f(x, y) = xy^3$. Határozza meg a függvény gradiensét a $P(2, 1)$ helyen.
- Legyen $f(x, y) = 5x - 2y + 4$. Határozza meg a függvény gradiensét a $P(1, 3)$ helyen.

(d) Iránymenti derivált

- Számolja ki az $f(x, y) = x^2 - 2xy$ függvény $\mathbf{v} = (-1, 2)$ irányú iránymenti deriváltját a $P(2, 1)$ pontban.
- Számolja ki az $f(x, y) = x + xy^2$ függvény $\alpha = 120°$ irányszöghöz tartozó iránymenti deriváltját a $P(-1, 1)$ pontban.

(e) Hesse-mátrix

- Határozza meg az $f(x, y) = x^5 - 3xy$ függvény Hesse-mátrixát.

(f) Stacionárius pontok meghatározása

- Mik a stacionárius pontjai az $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + x - y$ függvénynek?
- A $P(-1, 1)$ pont stacionárius pontja-e az $f(x, y) = (x + 1)^2 + (y + 1)^2$ függvénynek? Válaszát indokolja.

(g) Integrál téglalap felett

- Mi az $f(x, y) = 2x$ függvény kettős integrálja a $H = \{(x, y) \in R^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ tartományon?
- Mi az $f(x, y) = xy$ függvény kettős integrálja a $H = [0, 2] \times [0, 1]$ tartományon?